- التوزيع الهندسي Geometric Distribution

إذا عرفنا المتغير العشوائي X هو : عدد المحاولات التي نقوم بعملها إلى أن نصل إلى حالة نجاح أولى

يقال أن المتغير العشوائي المنفصل X يتبع توزيع هندسي بمعلمة P إذا كانت دالته الاحتمالية هي

$$f(x) = (1-p)$$

حيث $p + q = 1 \quad , \quad o \leqq p, q \leqq 1$

$$f(x) = q^{x-1}p$$

ويمكن كتابتها أحيان على الصورة

$$f(n) = (1-p)$$

$$f(n) = q^{n-1}\,p$$

مراجعة المتسلسلات الهندسية المنتهية واللانهائية :

المتسلسلة الهندسية اللانهائية (غير المنتهية) تكتب على الشكل الآتي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots$$

حيث أن a هو الحد الأول للمتسلسلة الهندسية ، r هو أساس المتسلسلة الهندسية .

<u>نظرية تقارب المتسلسلة اللانهائية ومجموعها :</u>

المتسلسلة الهندسية اللانهائية (غير المنتهية) $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ تكون تقاربيه إذا كان أساسها أقل من الواحد أي $r < 1$ ويكون مجموعها هو

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

حيث a هو الحد الأول و r هو الأساس ، وتكون متباعدة إذا كان $|r| \geq 1$.

علاقات رياضية مهمة جدا من مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية ستستخدم في اشتقاق الوسط الحسابي والتباين للتوزيع الهندسي

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}$$

بمفاضلة طرفي المعادلة مرة واحدة بالنسبة إلى r

$$\frac{d}{dr}\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dr} ar^{n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} anr^{n-1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} anr^{n-1} = \frac{a}{(1-r)^{2}}$$

بمفاضلة (1) مرة أخرى بالنسبة إلى r

$$\frac{d}{dr}\sum_{n=1}^{\infty} anr^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} an\,(n-1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} an\,(n-1)$$

$$=$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty} an^2\, r^{n-2}\right.$$

$$=$$

مجموع المتسلسلة الهندسية المحدودة (أو المنتهية)

$$\sum_{m=1}^{n} ar^{m-1} =$$

إثبات إن الدالة $f\,(x)$ هي دالة احتمالية :-

أولاً : حيث أن $x \geqq 1$ ، $o \leqq p \leqq 1$ فإن $f\,(x) \geqq o$ لجميع القيم x

ثانياً :

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}\ p = p$$

$$= p$$

وهي متوالية هندسية لا نهائية حدها الأول p وأساسها $q < 1$ فيكون مجموعها حسب العلاقة (A) هو مجموعها

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}\ p =$$

وهذا يؤكد أن $f(x)$ دالة احتمالية وقد سميت بالتوزيع الهندسي لأن احتمالات قيم X المختلفة تناظر حدود متوالية هندسية .

يستخدم هذا التوزيع إذا كان هناك محاولات أو تجارب وتمثل X عدد هذه المحاولات حتى الحصول على أول نجاح . علما بأن احتمال النجاح P واحتمال الفشل في أي محاولة q=1-p فمثلا في فحص الإنتاج ربما تكون X عدد السلع المفحوصة حتى الحصول على أول سلعة تالفة وكذلك في تجربة ألقاء قطعة النقود فربما تكون X عدد مرات إلقاء قطعة النقود حتى الحصول على أول صورة وكذلك عدد الولادات التي تضعها سيدة قبل أن ترزق بذكر .

دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الهندسي :

$$F(x) = P(X \leq$$

$$= \sum_{S=1}^{X} f($$

$$= p + pq +$$

وهي متسلسلة هندسية محدودة حدها الأول p وعدد حدودها هو X وأساسها q فيكون مجموعها حسب العلاقة (B)

$$F(x) = p$$

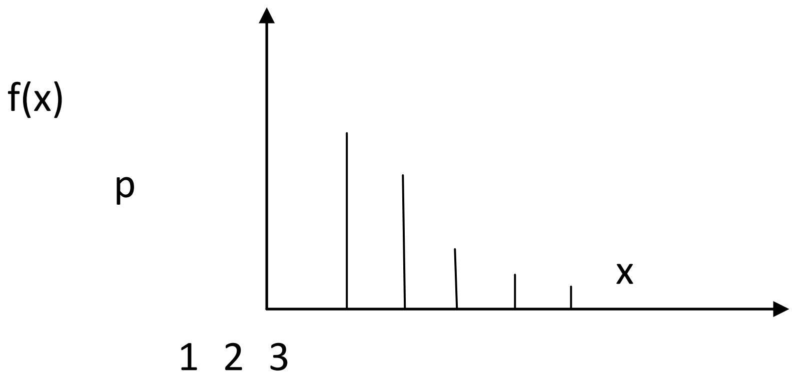
ويتضح لنا أن التوزيع الهندسي له صيغة رياضية صريحة لدالة التوزيع التراكمية كما هي موضحة أعلاه .

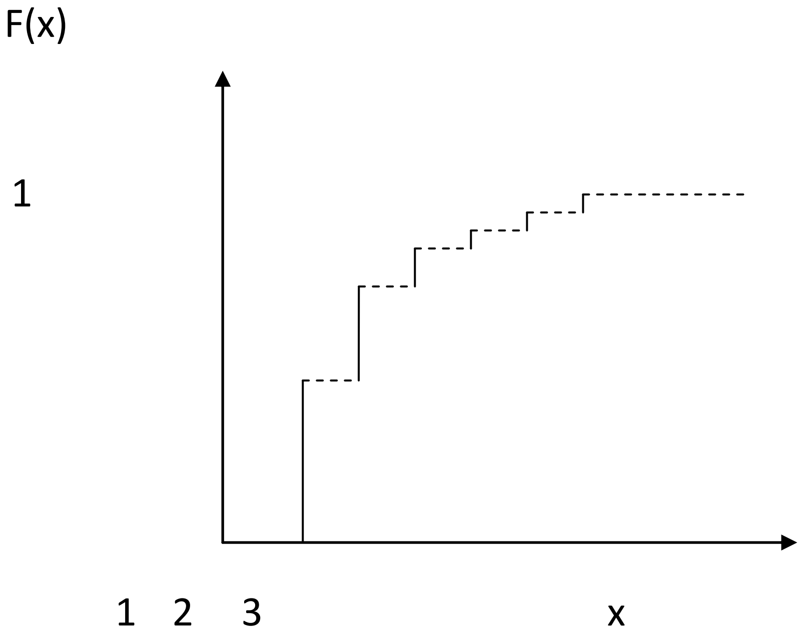
المنوال :

نلاحظ أن

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{p}{pq}$$

أي أن الحدود المتتالية متناقصة . وهذا يعني أن أعلى احتمال هو عند $X = 1$
وعلى ذلك فإن المنوال هو $X = 1$ وفيما يلي الشكل العام لهذا التوزيع .





متوسط التوزيع الهندسي باستخدام التعريف :

Meam of Geometric Distribution

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x\ q^{x-1}\ p$$

$$= p\ [1 + 2q + 3$$

باستخدام العلاقة (1) الناتجة من مفاضلة طرفي مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية حيث

الحد الأول = p=a

الأساس = r = q

المؤشر = x = n

فنحصل على

$$\mu = \frac{p}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{(1-q}{(1-q)\ (1}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{p}$$

تباين التوزيع الهندسي باستخدام التعريف :

$$\sigma^2 = E\ (X^2) - [$$

$$\downarrow$$

$$\sigma^2 = E\,(X^2) -$$

نوجد $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} [\,X$$

$$E\,(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} [\,x$$

$$= \sum_{X=1}^{\infty} x$$

لكي نستخدم العلاقة (2) الناتجة من التفاضل الثاني لمجموع متسلسلة هندسية

$$E\,(X^2) = \sum_{X=1}^{\infty} x\,($$

$$= q \sum_{X=1}^{\infty} x\,($$

$$= q\,\frac{2\,p}{(1-q}$$

$$= \frac{2\,q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2\,q}{p^2} +$$

$$E\,(X^2) = \frac{P + 2}{p^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{p+q}}{p^2}$$

E

$$\therefore\ \sigma^2 = \frac{1+q}{p^2}$$

$$= \frac{1+q-}{p^2}$$

الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الهندسي :-

$$M_X(t) = E\,(e^{tx}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty}\ e$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty}\ (e$$

$$= e^t\ p$$

$$M_X(t) = \ e^t\ p$$

ولكن $(e^t q)^{x-1}\ \ \sum_{x=1}^{\infty}$ متسلسلة هندسية لا نهائية حدها الأول (1)
وأساسها $(e^t q)$ ، فيكون مجموعها هو

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{(1-q}$$

المتوسط والتباين للتوزيع الهندسي باستخدام الدالة المولدة للعزوم :

لإيجاد المتوسط نفاضل الدالة مرة واحدة بالنسبة إلى t ونضع t = 0 .

$$M'_X(t) = \frac{(1-}{}$$

$$= \frac{pe^t -}{}$$

M

$$\therefore\ \mu = M'_X(0)$$

$$\mu'_2 = E\,(X^2) =$$

$$M''_X(t) = \frac{(1-}{}$$

$$= \frac{(1-}{}$$

$= \frac{pe^t -}{}$

$= \frac{pe^t +}{(1}$

$M''_X(0) = \mu'_2 =$

$\therefore \; M''_X(0) = \mu$

$\therefore \; \sigma_x^2 = E\,(X^2)$

$= M''_X(0) - [M$

$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$

مثال (١٦)

إذا كان احتمال ولادة ذكر في أي ولادة تمر بها سيده هو ⅓ . أوجد

(١) التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الوضع قبل أن ترزق هذه السيدة بذكر

(٢) أوجد متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق بأول ذكر

(٣) ما احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ولادتين

(٤) ما احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ثلاث ولادات على الأكثر .

الحل :-

احتمال ولادة الذكر $p = ⅓$

X عدد مرات الوضع قبل أن ترزق بأول ذكر

١- X تتبع توزيعا هندسيا بمعلمه $p = ⅓$ وبذلك تكون دالته الاحتمالية هي

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-}$$

٢- متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق بأول ولد هو μ حيث

$$\mu = {}^{1}/_{p} = 1/$$

٣- احتمال أن تضع ذكر لأول مرة بعد ولادتين هو $P(X = 2)$

$$P(X = 2) = f($$

٤-

$$P(X \leqq 3) = F($$
